Il campo $g: \Gamma \to G$ si dice estremale se $\forall c$ si ha che $x \mapsto \varphi(x, c)$ è una funzione estremale debole (nel senso della Lagrangiana F).

Data $S: (a,b) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, C^2, scriviamo $F^*(x, z, p) = F(x, z, p) - S_x - S_z \cdot p$. Si ricordi che abbiamo considerato $M = S_x + S_z \cdot p$, con questa definizione avremo $F^* = F - M$.

Un campo adattato a $\bar{u}$ si dice ottimale per $\bar{u}$ se $F^* \geq 0$ e $F^*(x, \bar{u}, \bar{u}') = 0$; se per ogni c si ha l'ottimalità per $\varphi(\cdot, c)$, allora il campo si dice ottimale. Infine, un campo ottimale si dice CAMPO DI WEIERSTRASS se $F^*(x, z, p) > 0$ per $p \neq P(x, z)$.

Teorema: Se g è un campo ottimale per $\bar{u}$, allora $\mathcal{F}(\bar{u}) \leq \mathcal{F}(u)$ per ogni $u \in C^1([a,b])$ con $u(a) = \bar{u}(a)$, $u(b) = \bar{u}(b)$ e tale che il grafico di u sia in G. In particolare, se G contiene un intorno del grafico di $\bar{u}$, allora $\bar{u}$ è minimo locale (per convergenza uniforme).

DIM.: E' solo un breve conto. Abbiamo già visto che M è costante sulle funzioni con lo stesso dato di bordo. Allora

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u')\,dx = \int_a^b \overbrace{F^*(x, u, u')}^{\geq 0} + M(x, u, u')\,dx \geq \int_a^b \overbrace{F^*(x, \bar{u}, \bar{u}')}^{= 0} + M(\bar{u})$$

$$= \int_a^b F^*(x, \bar u, \bar u') + M(\bar u) = J(\bar u).$$

10

<u>Corollario</u>: Un campo ottimale è estremale (relativamente alle c tali che G contenga un intorno di $\{(x, \varphi(x,c)), x \in (a,b)\}$).

Per brevità, chiamiamo $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x,z) = (x, z, P(x,z))$ la variabile che deve venire integrata.

<u>DEFINIZIONE</u>: Dati un campo g ed una S, si dice che valgano le equazioni di Carathéodory se

1) $S_x = F(\mathcal{P}) - P \cdot F_p(\mathcal{P})$
2) $S_z = F_p(\mathcal{P})$.

Si noti che le due equazioni sono nelle variabili x e z, ma c'è una p! Come terza variabile si prende sempre $P(x,z)$...

<u>Lemma</u>: Siano g un campo e S tale che $F^* \geq 0$. Allora S rende g ottimale se e solo se le equazioni di Carathéodory sono soddisfatte.

<u>DIM</u>: Visto che $F^* \geq 0$ per ipotesi, g è ottimale se e solo se $F^*(x, z, P(x,z)) = 0$ per ogni (x,z). Ma in effetti, se vale Carathéodory allora

$$F^*(x,z,P) = F(x,z,P) - S_x(x,z) - S_z(x,z) \cdot P$$

per la 1)

(per la 2)) $= F(x,z,P) - S_x(x,z) - F_p(x,z,P) \cdot P = 0$.

D'altra parte, se g è ottimale, $F^*(x,z,p) \geq 0 \;\; \forall p$ e $F^*(x,z,P) = 0$.

Perciò, $\frac{d}{dp} F^*(x,z,p)=0$ in $p=P(x,z)$. Visto che

$$F^*(x,z,p)=F(x,z,p)-S_x(x,z)-S_z(x,z)\cdot p,$$

$\frac{d}{dp} F^*\Big|_{p=P} = F_p(P)-S_z$, per cui vale la seconda equazione.

Ma allora, essendo $F^*(P)=0$, deve essere $F(P)=S_x+S_z\cdot P=S_x+F_p(P)\cdot P$,

quindi vale anche la prima. ∎

Data la lagrangiana F, chiamiamo forma di Beltrami la forma

$\boxed{\gamma=(F-F_p\cdot p)\,dx+\sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\,dz_i}$ Si tratta di una 1-forma in

$\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}^n_z\times\mathbb{R}^n_p$.

[BREVE RIPASSO: LE FORME.

Dato $\mathbb{R}^M_v$, una 1-forma è una $\omega=\sum_{j=1}^{M}\omega_j\,dv_j$ con $\omega_j:\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}$.

Una 2-forma è $\omega=\sum_{j,l=1}^{M}\omega_{jl}\,dv_j\wedge dv_l$, e si ha $dv_j\wedge dv_l=-dv_l\wedge dv_j$

e in particolare $dv_j\wedge dv_j=0$ (e allora le $M+1$ forme sono tutte nulle).

Data $f\in C^1$ si scrive $df=\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j$. Allora, per Schwartz, $d^2f=0$

per ogni $f\in C^2$, poiché $d^2f=d(df)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\wedge dx_j$,

e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$, mentre $dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i$.

Una forma ω è detta chiusa se $d\omega=0$, esatta se $\exists\,\eta: d\eta=\omega$.

Una forma esatta è chiusa; una forma chiusa su un dominio semplicemente connesso è esatta]

Data poi $\Phi : \mathbb{R}^M_v \longrightarrow \mathbb{R}^P_w$, si ha il pull-back

$\Phi^* : \mathbb{R}^{*P}_w \longrightarrow \mathbb{R}^{*M}_v$ ($\mathbb{R}^{*P}$ e $\mathbb{R}^{*M}$ sono gli spazi delle 1-forme).

Il pull-back è definito come $\Phi^*(f_1 \, dw_1 + f_2 \, dw_2 \dots + f_p \, dw_p)$

$$= f_1 \circ \Phi \, d\Phi_1 + f_2 \circ \Phi \, d\Phi_2 + \dots + f_p \circ \Phi \, d\Phi_p .$$

Ricordiamo ora che $P : G \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_z \times \mathbb{R}^n_p$, perciò il pull-back P^* trasforma 1-forme in $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_z \times \mathbb{R}^n_p$ in 1-forme in $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_z$.

Tenendo a mente che $P(x, z) = (x, z, P(x, z))$ e che $\gamma = (F - F_p \cdot p) \, dx + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \, dz_i$, si ha allora

$$P^*(\gamma) = P^*((F - F_p \cdot p) \, dx + F_{p_i} \, dz_i)$$
$$= (F - F_p \cdot p) \circ P \, dP_1 + F_{p_i} \circ P \, dP_{2,i}$$
$$= (F(P) - F_p(P) \cdot P) \, dx + F_p(P) \, dz .$$

Visto che G è semplicemente connesso, $P^*(\gamma)$ è chiusa $\iff$ $P^*(\gamma)$ è esatta.

Ma $P^*(\gamma)$ è esatta se e solo se esiste una 0-forma (ossia, una funzione) S tale che $P^*(\gamma) = dS$.

Ma $dS = S_x \, dx + S_z \, dz$, per cui

$$P^*(\gamma) = dS \iff (F(P) - F_p(P) \cdot P) \, dx + F_p(P) \, dz = S_x \, dx + S_z \, dz$$

$\iff$ valgono le equazioni di Carathéodory!

Questo è un passo avanti notevole! Dato il campo g, sappiamo che è ottimale se troviamo una S che verifichi le equazioni di Caratheodory. Ma invece di cercare tale S, basta controllare che $P^*(g)$ sia chiusa, e questo è solo un conto. Detto meglio, si ha il risultato seguente.

Teorema: Sia F convessa in p, e sia g un campo. Allora g è ottimale con un'opportuna S se e solo se $d\,P^*(g) = 0$.

Dim.: Se esiste S che rende g ottimale, allora valgono le equazioni di Caratheodory, e come appena osservato questo assicura $P^*(g)$ chiusa.

Supponiamo invece che $d\,P^*(g) = 0$: allora esiste S per cui valgono le equazioni di Caratheodory. Questo implica che g è ottimale purché sia $F^* \geq 0$. Vediamo come mostrarlo:

$$
\begin{aligned}
F^*(x, q, p) &= F(x, q, p) - S_x(x, q) - S_q(x, q) \cdot p \\
&= F(x, q, p) - F(x, q, P) + P \cdot F_p(x, q, P) - F_p(x, q, P) \cdot p \\
&= F(x, q, p) - F(x, q, P) + F_p(x, q, P) \cdot (P - p).
\end{aligned}
$$

Sia $\varphi(t) = F(x, q, P + t(p-P))$. Si ha che φ è convessa perché F è convessa in p. Allora

$$F^*(x, q, p) = \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0) \geq 0.$$

$\blacksquare$

5

Il passo avanti è ottimo, dobbiamo ora provare a sbarazzarci anche del campo... Intanto iniziamo col calcolare $d(P^*\gamma)$. Per farlo, è comodo definire $e : \Gamma \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_q \times \mathbb{R}^n_p$ come $e(x,c) = (x, \varphi(x,c), \varphi'(x,c))$. Si noti che $\boxed{e = P \circ g}$.

Scriviamo allora $\eta_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}$, e definiamo le PARENTESI DI LAGRANGE come

$$[c_j, c_\ell] = \frac{\partial\, \eta \circ e}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial c_\ell} - \frac{\partial\, \eta \circ e}{\partial c_\ell} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial c_j} \qquad \forall j, \ell \in \{1, \dots, m\}$$

Tutto questo è definito su Γ: si ricordi infatti che sia φ che e sono definite in Γ, e che le coordinate su Γ sono $(x, c_1, c_2, \dots, c_m)$. Si noti anche che η è un vettore, così come φ, per cui il prodotto è un prodotto scalare.

Un conto seccante ma molto utile è il seguente.

Lemma: Si ha

$$d(e^*\gamma) = EL_F(\varphi)\, \varphi_{c_j}\, dc_j \wedge dx + \sum_{1 \le j < \ell \le m} [c_j, c_\ell]\, dc_j \wedge dc_\ell.$$

Osserviamo che e^* trasforma le 1-forme su $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_q \times \mathbb{R}^n_p$, come γ, in 1-forme su Γ; perciò $d(e^*\gamma)$ è una 2-forma su Γ, ed è quindi normale usare $dc_j \wedge dx$ e $dc_j \wedge dc_\ell$ come base.

$$EL_F(\varphi) = F_q(x, \varphi, \varphi') - \frac{d}{dx} F_p(x, \varphi, \varphi')$$